Ασκ 1 Δίνεται στοχ. διαδ. $\{K_t\}_{t\in T}$ όπου $T=[0,m]$ κ' $K_t=\inf\{n: \sum_{i=1}^{n} u_i > t\}$ με $u_i \overset{iid}{\sim} U(0,m)$. Δείξτε ότι $\mathbb{E}[K_t]=e^{t/m}$

Ασκ 2: Δίνεται ο τυχαίος περίπατος $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ με $Z_n = Z_{n-1}+X_i$ όπου $X_i \overset{iid}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ q & r & p \end{pmatrix}$, $p+r+q=1$.

Να δειχθεί ότι (i), η σ.δ $\{Z_n\}$ έχει την Μαρκοβιανή ιδιότητα κ' είναι χρονικά ομογενής (ii) να βρεθούν οι πιθανότητες μετάβασης $p_j(y|x)$, $j=1,2,3$ (iii) Πότε η Z_n είναι martingale ?

Ασκ 3 Ο αριθμός των σεισμών παγκοσμίως, στο διάστημα $[0,t]$ μοντελοποιείται με διαδικασία Poisson $N_t \sim PP(\lambda)$. Εάν έχει παρατηρηθεί ότι η πιθανότητα σεισμού με μέγεθος στο $(0,4]$ είναι p, στο $(4,7]$ είναι q κ' στο $(7,\infty)$ είναι r, με $p+q+r=1$, να δειχθεί ότι οι διαδικασίες $\{X_t\}_{t\geq 0}$, $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ κ' $\{Z_t\}$ που μετρούν αντίστοιχα τις 3 κατηγορίες σεισμών είναι: $X_t \sim PP(\lambda p)$, $Y_t \sim PP(\lambda q)$ κ' $Z_t \sim PP(\lambda r)$.

Ασκ 4 Εστω $N_t \sim PP(\lambda)$ κ' n ανεξάρτητες Poisson $N_t^j \sim PP(\lambda p_j)$ έτσι ώστε $N_t = \sum_{j=1}^{n} N_t^j$, $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$

Εαν T είναι η τμ. που δίνει τον απαιτούμενο χρόνο για την παρουσίαση όλων των τύπων αφίξεων κ' N η τμ για τον αντίστοιχο απαιτούμενο αριθμό αφίξεων να βρεθούν $\mathbb{E}[T]$ κ' $\mathbb{E}[N]$. Κάντε εφαρμογή για $n=2$ κ' $\lambda=1$.

[$T = \max_{1\leq j \leq n} T_1^j$ όπου $T_1^j = \inf\{t : N_t^j = 1\}$

$\mathbb{P}\{T \leq t\} = ?$ ακόμα έχουμε ότι $T = \sum_{i=1}^{N} T_i$]

Ασκ 5 Εαν ταξιδιώτες φτάνουν σε σταθμό τραίνου σύμφωνα με την $N_t \sim PP(\lambda)$ κ' το τραίνο αναχωρεί σε χρόνο t, να υπολογιστεί η μέση τιμή του χρόνου αναμονής όλων των ταξιδιωτών.

[$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N_t}(t - Y_i)\right] = ?$ όπου $Y_i = \sum_{j=1}^{i} T_j$, $T_j \overset{iid}{\sim} Exp(\lambda)$]

Ασκ 6. Εστω ότι μια άφιξη από $N_t \sim PP(\lambda)$ χαρακτηρίζεται σαν τύπου-I με πιθανότητα $\phi(s)$ ($0 \leq \phi(s) \leq 1$, $s>0$) εαν συμβεί την χρονική στιγμή s κ' τύπου-II με πιθανότητα $1-\phi(s)$. Δείξτε ότι $N_t = N_t^{I} + N_t^{II}$ με $N_t^{I} \perp N_t^{II}$, $N_t^{I} \sim PP(\lambda p)$, $N_t^{II} \sim PP(\lambda(1-p))$ κ'

$p = \frac{1}{t}\int_0^t \phi(s)\,ds$.

[Εαν $S' = [T_1 | N_t = 1] \Rightarrow p = \mathbb{E}[\phi(S')]$, $S \sim \mathcal{U}(0,t)$

κ' $N_t^{I} \perp N_t^{II} \Leftrightarrow P\{N_t^{I} = n, N_t^{II} = m\} = \underbrace{P_o(n|\lambda p t)}_{P\{N_t^{I}=n\}} \cdot \underbrace{P_o(m|\lambda(1-p)t)}_{P\{N_t^{II}=m\}}$]

Ασκ 7 Εαν $\{W_t\}_{t\geq 0}$ είναι η διαδικασία Wiener, ορίζουμε την διαδικασία $\{X_t\}_{t\in T}$, $T=[0,1]$, $X_t = W_t - tW_1$.

Δείξτε ότι: $X_t \sim N(0, t(1-t))$ [Χρησιμοποιείστε ότι: $W_s | W_t \overset{s<t}{\sim} N(\frac{s}{t}y, \frac{s}{t}(t-s))$]

Ασκ 8 (i) Δείξτε ότι ισχύει (the law of total covariance)

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}[Cov(X,Y|Z)] + Cov(\mathbb{E}(X|Z), \mathbb{E}(Y|Z)).$$

(ii) Εαν $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ είναι η σύνθετη διαδικασία Poisson $Z_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$ όπου $X_i \overset{iid}{\sim} X \sim f_X(\cdot)$, Βρείτε το $Cov(Z_s, Z_t)$.

[Το (i) αποδεικνύεται όπως κ' η ειδική περίπτωση για $X=Y$
$Var(X) = \mathbb{E}[Var(X|Z)] + Var[\mathbb{E}(X|Z)]$.

Το (ii) χρησιμοποιώντας για $s<t$ $Cov(Z_s,Z_t) = \mathbb{E}[Cov(Z_s,Z_t|N_t)] + Cov(\mathbb{E}(Z_s|N_t), \mathbb{E}(Z_t|N_t))$, όπου θα πρέπει να λάβουμε υπόψιν μας ότι $N_s | N_t = n \underset{s<t}{\sim} Bin(n, s/t)$. Τότε $Cov(Z_s,Z_t) \overset{s<t}{=} \lambda s \mathbb{E}[X^2]$

Ενώ για οποιαδήποτε s,t: $Cov(Z_s,Z_t) = \lambda \cdot s\wedge t \cdot \mathbb{E}[X^2]$.]